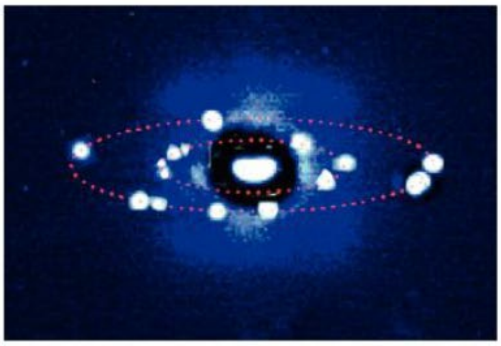
Série10- Mouvement dans un champs de gravitation -Exercices

Exercice 01

L'astéroïde Sylvia

| Exploiter des informations ; effectuer des calculs ; discuter un modèle.

L'astéroïde Sylvia est le premier astéroïde découvert à posséder deux satellites naturels baptisés Remus et Romulus.
On s'intéresse au mouvement du centre de masse P de l'astéroïde Sylvia qui décrit autour du Soleil une orbite assimilée à un cercle de rayon r.
L'étude se fait dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen.



> Photomontage montrant les positions de Remus et Romulus autour de Sylvia

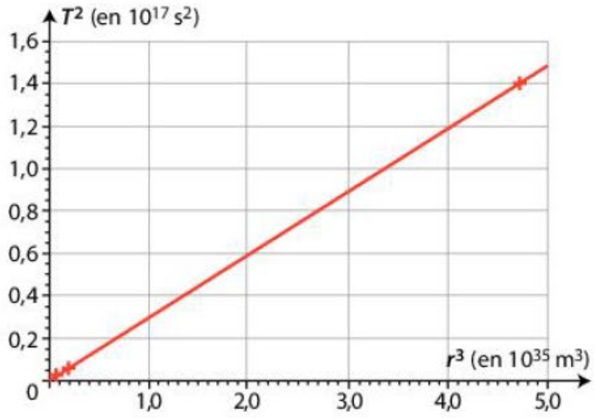
Donnée

Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

1. a. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement de l'astéroïde Sylvia de masse M, autour du Soleil de masse M_S, est uniforme.
b. Établir l'expression de la valeur v de la vitesse de l'astéroïde Sylvia sur son orbite, puis donner son expression vectorielle $\vec{v}$.

1. a. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement de l'astéroïde Sylvia de masse M, autour du Soleil de masse M_S, est uniforme.
b. Établir l'expression de la valeur v de la vitesse de l'astéroïde Sylvia sur son orbite, puis donner son expression vectorielle $\vec{v}$.

2. a. Établir la troisième loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique.
b. Le graphique ci-contre a été tracé en prenant en compte les paramètres caractéristiques de trois planètes du système solaire dont la trajectoire autour du Soleil est quasi circulaire.
Ce graphique traduit-il la troisième loi de Kepler ?



3. L'astéroïde Sylvia gravite autour du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans.
Déterminer le rayon r de l'orbite de l'astéroïde Sylvia.

4. Les deux satellites Romulus et Remus décrivent une orbite circulaire autour de Sylvia. La période de révolution de Romulus est 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Sylvia sont 710 kilomètres pour Remus et 1 360 kilomètres pour Romulus.
En appliquant la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Sylvia dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement circulaire.

12 CORRIGÉ **Connaître les critères de réussite**

Satellite CFOSAT

| Mobiliser ses connaissances ; effectuer des calculs.

Le 29 octobre 2018, le satellite CFOSAT, de masse m, a été mis en orbite circulaire autour de la Terre à une altitude de 519 km par le CNES et son homologue chinois le CNSA, pour cartographier les vents et les vagues à la surface des océans.

1. Schématiser la situation et représenter la force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite.

2. Montrer que le mouvement du centre de masse du satellite CFOSAT est uniforme dans le référentiel géocentrique.

3. Donner les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre de masse du satellite dans ce référentiel.

4. Déterminer la période de révolution T du satellite.

Données

- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
- Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg.
- Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km.

15 Résolution de problème

Station spatiale internationale

| Construire les étapes d'une résolution de problème.

La station spatiale internationale ISS gravite autour de la Terre à une vitesse de valeur moyenne 7,66 $km \cdot s^{-1}$.
Elle évolue sur une orbite terrestre basse, zone de l'orbite terrestre allant jusqu'à 2 000 km d'altitude. On y retrouve des satellites de télédétection, des satellites de télécommunications, ainsi que quelques stations spatiales.

• Dans l'approximation des trajectoires circulaires, déterminer l'altitude h de l'ISS.

Données

• Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
• Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg.
• Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km.

16 Éris et Dysnomia

| Mobiliser ses connaissances ; effectuer des calculs.

D'après Baccalauréat Liban, 2009

Éris parcourt une orbite elliptique autour du Soleil et possède un satellite naturel baptisé Dysnomia. Le mouvement de Dysnomia autour d'Éris, de masse M_E, est supposé circulaire et uniforme.

1. Définir le référentiel permettant d'étudier le mouvement de Dysnomia autour d'Éris. Ce référentiel est considéré comme galiléen.

2. Donner les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse de Dysnomia.

3. Montrer que la période de révolution T_D de Dysnomia a pour expression :

$$T_D = 2\pi \times \sqrt{\frac{r_D^3}{G \times M_E}}$$

4. Exprimer puis calculer la masse M_E d'Éris.

Données

• Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
• Rayon de l'orbite circulaire de Dysnomia : $r_D = 3{,}60 \times 10^7$ m.
• Période de révolution de Dysnomia : $T_D = 15{,}0$ jours.

20 (60 min, CORRIGÉ) Les lunes de Saturne

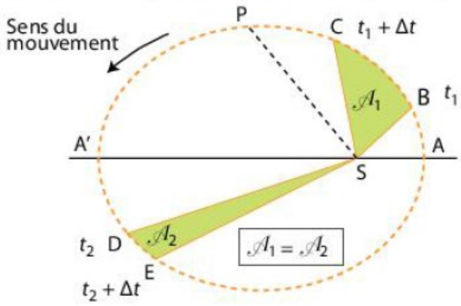
| Faire un schéma adapté ; effectuer des calculs.

En 2019, vingt lunes supplémentaires de Saturne ont été découvertes. Ainsi, 82 satellites naturels connus à ce jour orbitent autour de cette planète.

A Données sur la lune S/2004 S 24

Saturne est la planète du système solaire qui détient actuellement le record du nombre de lunes.
On considère la trajectoire de la lune S/2004 S 24 comme circulaire dans le référentiel saturnocentrique.
Sa période T de révolution est 3,54 ans.
Le rayon r de son orbite est $2{,}29 \times 10^7$ km.

B Deuxième loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique



Les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, balayées pendant des durées Δt égales, sont égales. L'arc $\widehat{BC}$ est donc plus long que l'arc $\widehat{DE}$.
Ces deux arcs étant parcourus pendant la même durée Δt, la valeur de la vitesse moyenne de la planète P entre B et C est supérieure à celle entre D et E.

1. a. Faire un schéma de la lune S/2004 S 24 en orbite autour de Saturne.

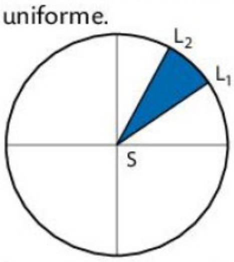
b. Représenter le repère de Frenet centré sur le système muni des vecteurs unitaires tangentiel $\vec{u}_t$ et normal $\vec{u}_n$.

c. Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F}_{S/L}$ exercée par Saturne (S) sur la lune (L) S/2004 S 24.

2. Par application de la deuxième loi de Newton, déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ du système.

3. a. Montrer que le mouvement circulaire de la lune S/2004 S 24 autour de Saturne est uniforme.

b. On a représenté ci-contre l'aire balayée par le segment [SL] pendant une durée Δt.
Reproduire et compléter ce schéma afin d'illustrer la deuxième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.



4. Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse de la lune S/2004 S 24.

5. a. Montrer que la période de révolution T de cette lune a pour expression : $T = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times M_S}}$.

b. Calculer la masse de Saturne.

6. La lune Métis a une période de révolution T de 0,295 jour et son orbite circulaire a un rayon de 128 000 km.
Métis peut-elle être une lune de Saturne ?

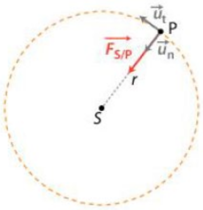
Données

• Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
• 1 an $= 3{,}156 \times 10^7$ s.

CORRIGE----Série10- Mouvement dans un champs de gravitation

Exercice 01

1. a. On étudie le mouvement du système {Sylvia} modélisé par son centre de masse P dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.



La seule force qui s'applique sur le système est la force de gravitation exercée par le Soleil. Son expression dans le repère de Frenet est : $\vec{F}_{S/P} = G \times \dfrac{M_S \times M}{r^2}\,\vec{u}_n$.

Appliquons la deuxième loi de Newton :

$\Sigma\vec{F} = M\vec{a}$ donc $\vec{F}_{S/P} = G \times \dfrac{M_S \times M}{r^2}\,\vec{u}_n = M\vec{a}$. D'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_S}{r^2}\,\vec{u}_n$.

Dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_n + \dfrac{dv}{dt}\,\vec{u}_t$.

Par identification des accélérations tangentielles, $\dfrac{dv}{dt} = 0$. Il vient $v = $ cte, le mouvement est uniforme.

b. Par identification des accélérations normales, $\dfrac{v^2}{r} = G \times \dfrac{M_S}{r^2}$. On en déduit que $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$. Le vecteur vitesse a pour expression $\vec{v} = v \times \vec{u}_t$ avec $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

2. a. La période de révolution de l'astéroïde est $T = \dfrac{2\pi \times r}{v}$,

soit $T = 2\pi \times r \times \sqrt{\dfrac{r}{G \times M_S}}$ d'où $T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{r^3}{G \times M_S}$.

On obtient finalement $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_S} = $ constante.

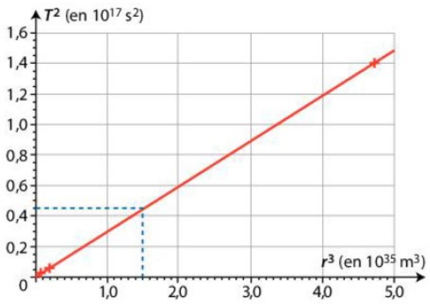
b. La représentation graphique $T^2 = f(r^3)$ est une droite qui passe par l'origine. Il y a donc proportionnalité entre T^2 et r^3 : $T^2 = k \times r^3$ où k est le coefficient de proportionnalité.

Ainsi, $\dfrac{T^2}{r^3} = k$, ce qui confirme la troisième loi de Kepler.

3. La période de révolution de Sylvia est 6,521 ans, soit $2{,}058 \times 10^8$ s.

On calcule : $T^2_{Sylvia} = 0{,}4235 \times 10^{17}\ s^2$.

On lit graphiquement : $r^3 = 1{,}5 \times 10^{35}\ m^3$, d'où $r = 5{,}3 \times 10^{11}$ m.



4. Par application de la troisième loi de Kepler aux satellites de Sylvia, on a :

$$\left(\frac{T^2}{r^3}\right)_{Remus} = \left(\frac{T^2}{r^3}\right)_{Romulus} = \frac{4\pi^2}{G \times M}$$

Donc $M = \dfrac{4\pi^2}{G} \times \left(\dfrac{r^3}{T^2}\right)_{Romulus}$

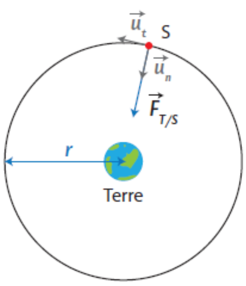
$M = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \times \dfrac{(1\,360 \times 10^3)^3\ m^3}{(87{,}6 \times 3\,600)^2\ s^2}$ d'où $M = 1{,}50 \times 10^{19}$ kg.

La masse de Sylvia est $1{,}50 \times 10^{19}$ kg.

12 Connaître les critères de réussite
Satellite CFOSAT

1. Soit S le centre de masse du satellite.

2. On applique la deuxième loi de Newton au centre de masse du satellite dans le référentiel géocentrique considéré galiléen :



$\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{a}$ en notant m la masse du satellite.

Or $\vec{F}_{T/S} = G \times \dfrac{m \times M_T}{r^2}\vec{u}_n$, avec le rayon de l'orbite $r = R_T + h$ (h est l'altitude du satellite).

On a $m\,\vec{a} = G \times \dfrac{m \times M_T}{(R_T + h)^2}\vec{u}_n$

d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}\vec{u}_n$.

On a donc $\vec{a}\begin{cases} a_n = G \times \dfrac{M_T}{(R_T + h)^2} \\ a_t = 0\ m \cdot s^{-2} \end{cases}$

La coordonnée tangentielle de l'accélération $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ est nulle, donc la valeur de la vitesse de S est constante : le mouvement est uniforme dans ce référentiel.

3. La coordonnée normale de l'accélération est : $a_n = \dfrac{v^2}{R_T + h}$.

Par identification, $\dfrac{v^2}{R_T + h} = G \times \dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$, ainsi $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre de masse du satellite est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement et sa valeur est $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}$.

4. Le mouvement est circulaire uniforme, on a donc :

$T = \dfrac{2\pi \times (R_T + h)}{v}$ et $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}$.

Il vient $T = \dfrac{2\pi \times (R_T + h)}{\sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}}$, d'où $T = 2\pi \times (R_T + h) \times \sqrt{\dfrac{R_T + h}{G \times M_T}}$

soit $T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{G \times M_T}}$

$$T = 2\pi \times \sqrt{\frac{(6{,}4 \times 10^6\,m + 519 \times 10^3\,m)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \times 6{,}0 \times 10^{24}\,kg}}.$$

La période de révolution de S est $5{,}7 \times 10^3$ s.

15 Résolution de problème
Station spatiale internationale

1re étape : S'approprier la question posée

1. Dans quel référentiel étudier le mouvement d'un satellite de la Terre ?

2. Quel est le repère le plus adapté pour étudier le mouvement de l'ISS ?

3. Quelles sont les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération ?

2e étape : Lire et comprendre les documents

- Pour étudier le mouvement d'un satellite de la Terre, il est préférable d'utiliser le référentiel géocentrique. La deuxième loi de Newton est plus facile à utiliser dans le repère de Frenet dont l'origine est placée au centre de masse de l'ISS.
- On se place dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, le vecteur vitesse a une valeur constante et le vecteur accélération de l'ISS sera perpendiculaire à sa trajectoire et dirigé vers le centre de la Terre.

3e étape : Dégager la problématique

Comment déterminer l'altitude de la station spatiale internationale dans le référentiel géocentrique, à partir de la deuxième loi de Newton, connaissant la valeur de sa vitesse ?

4e étape : Construire la réponse

- Définir le système, le référentiel.
- Faire l'inventaire des forces appliquées au système.
- Appliquer la deuxième loi de Newton et travailler dans le repère de Frenet.
- Établir l'expression de la valeur v de la vitesse de l'ISS.
- Extraire puis calculer l'altitude de l'ISS ; vérifier qu'elle est inférieure à 2 000 km, zone d'une orbite terrestre basse.

5e étape : Répondre

Le système étudié est l'ISS dans le référentiel géocentrique considéré galiléen. On souhaite déterminer l'altitude de l'ISS à partir de la deuxième loi de Newton, connaissant la valeur de sa vitesse.
On suppose que l'ISS n'est soumise qu'à la force de gravitation exercée par la Terre qui a pour expression dans le repère de Frenet :

$\vec{F}_{T/ISS} = G \times \dfrac{m \times M_T}{r^2}\vec{u}_n$, avec m la masse de l'ISS et r le rayon de sa trajectoire circulaire.

On applique la deuxième loi de Newton.

$$\vec{F}_{T/ISS} = m\,\vec{a}.$$

Il vient $G \times \dfrac{m \times M_T}{r^2}\vec{u}_n = m\,\vec{a}$ avec $r = R_T + h$;

d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$.

La coordonnée normale de l'accélération a pour expression :

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T + h}.$$

On peut donc écrire : $\dfrac{v^2}{R_T + h} = G \times \dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$.

D'où $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}$.

On connaît la valeur v de la vitesse, on extrait de cette relation l'altitude h. Soit :

$$v^2 = \frac{G \times M_T}{R_T + h} \Leftrightarrow R_T + h = \frac{G \times M_T}{v^2}. \text{ Ainsi } h = \frac{G \times M_T}{v^2} - R_T$$

$$h = \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2} \times 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}}{(7{,}66 \times 10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} - 6{,}4 \times 10^6\,\text{m}.$$

$h = 4{,}2 \times 10^5$ m.
L'altitude de l'ISS est $4{,}2 \times 10^5$ m soit $4{,}2 \times 10^2$ km. Cette altitude est inférieure à 2 000 km synonyme d'une orbite terre basse.
À une telle altitude, il est plutôt raisonnable de ne pas prendre en compte les forces de frottement dues à l'air de l'atmosphère terrestre.

16 Éris et Dysnomia

1. Le référentiel permettant d'étudier Dysnomia est lié au centre d'Éris.

2. $\vec{F}_{E/D} = G \times \dfrac{m \times M_E}{{r_D}^2}\vec{u}$ où m est la masse de Dysnomia et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire attaché au repère de Frenet liée à Dysnomia qui pointe vers le centre d'Éris.
La deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse de Dysnomia permet d'écrire :

$\vec{F}_{E/D} = m\,\vec{a}$ d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_E}{{r_D}^2}\vec{u}$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse de Dysnomia est perpendiculaire à sa trajectoire et pointe vers le centre d'Éris. Sa valeur $a = G \times \dfrac{M_E}{{r_D}^2}$.

3. La coordonnée normale de l'accélération a pour expression :

$a_n = \dfrac{v^2}{r_D}$. On a donc $\dfrac{v^2}{r_D} = G \times \dfrac{M_E}{{r_D}^2}$, ainsi $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_E}{r_D}}$.

La période de révolution de Dysnomia est égale à la durée mise par ce satellite pour faire un tour complet d'Éris à la vitesse de valeur v suivant une trajectoire circulaire :

$$T_D = \frac{2\pi \times r_D}{v} \text{ et } v = \sqrt{\frac{G \times M_E}{r_D}}.$$

Il vient $T_D = \dfrac{2\pi \times r_D}{\sqrt{\dfrac{G \times M_E}{r_D}}}$; d'où $T_D = 2\pi \times r_D\sqrt{\dfrac{r_D}{G \times M_E}}$,

soit $T_D = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{{r_D}^3}{G \times M_E}}$.

4. En élevant au carré, ${T_D}^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{r_D^3}{G \times M_E}$.

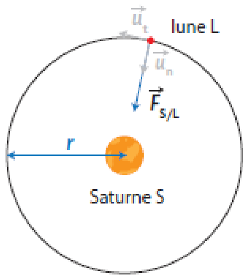
D'où $M_E = \dfrac{4\pi^2}{G \times {T_D}^2} \times {r_D}^3$.

$$M_E = \frac{4\pi^2 \times (3{,}60 \times 10^7\,\text{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2} \times (15{,}0 \times 24 \times 3600\,\text{s})^2}$$

$M_E = 1{,}64 \times 10^{22}$ kg.
La masse d'Éris est $1{,}64 \times 10^{22}$ kg.

20 Les lunes de Saturne

1.a. et **b.** Voir schéma ci-dessous.



c. $\vec{F}_{S/L} = G \times \frac{m \times M_S}{r^2} \vec{u}_n$.

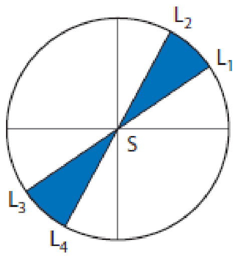
2. Dans le référentiel saturnocentrique, la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse de la lune donne : $\vec{F}_{S/L} = m\,\vec{a}$.

Or $\vec{F}_{S/L} = G \times \frac{m \times M_S}{r^2} \vec{u}_n$, d'où $\vec{a} = G \times \frac{M_S}{r^2} \vec{u}_n$.

3.a. On a donc $\vec{a} \begin{cases} a_n = G \times \frac{M_S}{r^2} \\ a_t = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$.

La coordonnée tangentielle de l'accélération $a_t = \frac{dv}{dt}$ est nulle, donc la valeur de la vitesse de la lune est constante : le mouvement est uniforme dans ce référentiel.

b. D'après la deuxième loi de Kepler, le segment de droite SL, reliant les centres de Saturne et de sa lune, balaie des aires égales pendant des durées égales.
Lorsque la trajectoire est circulaire, les distances parcourues (L_1, L_2) et (L_3, L_4) pendant une même durée sont égales.



4. La coordonnée normale de $\vec{a}$ est :

$a_n = \frac{v^2}{r}$.

Par identification, $G \times \frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{r}$ d'où $v = \sqrt{\frac{G \times M_S}{r}}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre de masse de la lune est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement et sa valeur est $v = \sqrt{\frac{G \times M_S}{r}}$.

5.a. La période de révolution de la lune est égale à la durée mise par ce satellite pour faire un tour complet de Saturne à la vitesse de valeur v suivant une trajectoire circulaire : $T = \frac{2\pi \times r}{v}$.

Il vient $T = 2\pi \times r \times \sqrt{\frac{r}{G \times M_S}}$.

La période de révolution de cette lune s'exprime par :

$T = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times M_S}}$.

b. On isole M_S : $T^2 = 4\pi^2 \times \frac{r^3}{G \times M_S}$; donc $M_S = \frac{4\pi^2}{G \times T^2} \times r^3$

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times \left(2{,}29 \times 10^{10}\,\text{m}\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \times \left(3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7\ \text{s}\right)^2}.$$

La masse de Saturne est $5{,}69 \times 10^{26}$ kg.

6. Si Métis est une lune de Saturne on a : $\frac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}} = \frac{T^2_L}{r^3_L}$.

On calcule $\frac{T^2_L}{r^3_L}$ et $\frac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}}$.

$$\frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{\left(3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7\ \text{s}\right)^2}{\left(2{,}29 \times 10^{10}\,\text{m}\right)^3} = 1{,}04 \times 10^{-15}\,\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\frac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}} = \frac{\left(0{,}295 \times 24 \times 3600\ \text{s}\right)^2}{\left(1{,}28 \times 10^8\,\text{m}\right)^3} = 3{,}10 \times 10^{-16}\,\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

$\frac{T_L^2}{r_L^3} \neq \frac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}}$ donc Métis n'est pas une lune de Saturne.